

۱

گزینه درست: ۱

سوال ۱

گزینه «۱»

۲

گزینه درست: ۴

سوال ۲

یک دنباله‌ی حسابی داریم با جمله‌ی عمومی $a_n = 4n + 1$ که در آن $10 \leq a_n \leq 99$

$$10 \leq 4n + 1 \leq 99 \Rightarrow 9 \leq 4n \leq 98 \Rightarrow \frac{9}{4} \leq n \leq \frac{98}{4}$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 3 \leq n \leq 24$$

$$\text{تعداد اعداد} = 24 - 3 + 1 = 22$$

۳

گزینه درست: ۴

سوال ۳

گزینه «۴»

دنباله افزایشی است، پس قدر نسبت آن بزرگ‌تر از یک است، داریم:

$$4, a, 9, b, \dots$$

بنا به تعریف دنباله هندسی:

$$\frac{a}{4} = \frac{9}{a} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$$q = \frac{a}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q}$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{4 \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^6 \right)}{1 - \frac{3}{2}} = 8 \left(\left(\frac{3}{2} \right)^6 - 1 \right)$$

$$\Rightarrow S_6 = 8 \left(\frac{729}{64} - 1 \right) = \frac{665}{8} = 83 \frac{1}{8}$$

۴

گزینه درست: ۲

سوال ۴

ابتدا a_1 و d را به دست می‌آوریم:

$$S_1 = a_1 = 3(1)^2 - 13(1) = -10$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 3(2)^2 - 13(2) = -14 \Rightarrow a_2 = -4$$

$$\Rightarrow d = a_2 - a_1 = 6$$

$$a_{24} + a_{18} = 23d + a_1 + 17d + a_1 = 2a_1 + 40d = 220$$

۵

گزینه درست: ۳

سوال ۵

گزینه «۳»

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم ($a > 0$)

$$2x - 4 + 2\sqrt{x^2 - 4x + 3} = a^2$$

$$\Rightarrow (x - 1) + (x - 3) + 2\sqrt{(x - 1)(x - 3)} = a^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 3})^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 3} = a$$

فرض می‌کنیم: $\sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 3} = A$

$$\begin{cases} \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 3} = a & (1) \\ \sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 3} = A & (2) \end{cases} \Rightarrow aA = (x - 1) - (x - 3) = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{a}$$

۶

سوال ۶

گزینه درست: ۱

گزینه «۱»

$$x^{-1} = 2\sqrt[3]{2} + 4 + 2\sqrt[3]{4} \rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2} + 4 + 2\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16} + 4 + 2\sqrt[3]{4}}$$

مخرج عبارت آخر قسمت چاق اتحاد چاق و لاغر $(2 - \sqrt[3]{4})(4 + 2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{16})$ است پس کافیت حاصل کسر را در عبارت $2 - \sqrt[3]{4}$ ضرب و تقسیم کنیم.

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{16} + 4 + 2\sqrt[3]{4}} \times \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2 - \sqrt[3]{4}} = \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{8 - 4} = \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{4}$$

$$1 - 4x + 4x^2 = (1 - 2x)^2 = (1 - 2 \times \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{4})^2 = (1 - 1 + \frac{\sqrt[3]{4}}{2})^2 = (\frac{\sqrt[3]{4}}{2})^2$$

$$= \frac{\sqrt[3]{16}}{4} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

۷

سوال ۷

گزینه درست: ۴

گزینه «۴»

$$A = \sqrt[3]{3 + 2 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}}$$

$$= \sqrt[3]{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} - \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2}} = \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$$

$$= 2\sqrt{3} - 2 \Rightarrow A^4 = (2\sqrt{3} - 2)^2 = 4(3 + 1 - 2\sqrt{3}) = 8(2 - \sqrt{3})$$

۸

سوال ۸

گزینه درست: ۴

گزینه «۴»

جواب‌های معادله در خود معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha^2 - 6\alpha + 7 = \beta^2 - 6\beta + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 = \beta^2 - 6\beta + 9 = 2$$

پس برای محاسبه عبارت داده شده داریم:

$$(\alpha^2 - 6\alpha + 9)^{2\beta} (\beta - 3)^{6\alpha} = (\alpha^2 - 6\alpha + 9)^{2\beta} (\beta^2 - 6\beta + 9)^{2\alpha}$$

$$= 2^{2\beta} \times 2^{2\alpha} = 2^{2(\alpha+\beta)}$$

در معادله داده شده $\alpha + \beta = S = 6$ است و در نتیجه مطلوب مسئله برابر $2^{12} = 4096$ است.

۹

سوال ۹

گزینه درست: ۲

گزینه «۲»

جواب‌های معادله دوم را α و β در نظر می‌گیریم. در این صورت جواب‌های معادله اول $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ خواهند بود. داریم:

$$\begin{cases} \alpha\beta = b + 2 \\ \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta} = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 = b + 2 \Rightarrow b^2 - b - 2 = (b + 1)(b - 2) = 0$$

$$\xrightarrow{b > 0} b = 2$$

همچنین داریم:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = a \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = a^2$$

$$\Rightarrow a + 1 + 2 = a^2 \Rightarrow a^2 - a - 12 = (a - 4)(a + 3) = 0$$

$$\xrightarrow{a > 0} a = 4 \Rightarrow ab = 8$$

گزینه «۳»

چون $\alpha + 1$ و $\beta + 1$ ریشه‌های $2x^2 + 5x + 1 = 0$ هستند، داریم:

$$\alpha + 1 + \beta + 1 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{9}{2}$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha + \beta = -\frac{9}{2}} \alpha\beta = 4$$

از اینجا داریم:

$$2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2\left(-\frac{9}{2}\right) = -9$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{9}{2}}{4} = -\frac{9}{8}$$

معادله موردنظر را می‌نویسیم:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$\xrightarrow{S = -9 - \frac{9}{8} = -\frac{81}{8}} x^2 + \frac{81}{8}x + \frac{81}{8} = 0$$

$$\xrightarrow{P = (-9)\left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{81}{8}}$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 81x + 81 = 0$$

گزینه «۲»

در مورد معادله $2x^2 + mx - 2 = 0$ داریم:

$$S = \frac{-b}{a} = -\frac{m}{2} : \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{2}{2} = -1 : \text{حاصلضرب ریشه‌ها}$$

اعداد $1 - P, \frac{1}{P}, S$ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند پس $\frac{1}{P}$ واسطه حسابی بین دو عدد دیگر است، در نتیجه:

$$\frac{1}{P} = \frac{S + (1 - P)}{2} \Rightarrow S + (1 - P) = \frac{1}{P}$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{2} + 1 - (-1) = \frac{1}{P} \Rightarrow -\frac{m}{2} = \frac{-3}{P} \Rightarrow m = 3$$

گزینه «۲»

نقطه (a, b) روی نمودار $y = 1 - f(1 - x)$ قرار دارد، پس نقطه $(1 - a, 1 - b)$ روی نمودار خود تابع $y = f(x)$ قرار دارد.همچنین اگر نقطه $(1 - a, 1 - b)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، نقطه $(\frac{2-a}{3}, 3 - 2b)$ روی نمودار تابع $y = 2f(3x - 1) + 1$ قرار دارد.از آنجایی که نمودار تابع $y = 2f(3x - 1) + 1$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، داریم:

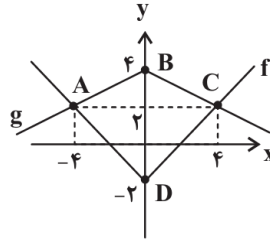
$$\left. \begin{aligned} \frac{2-a}{3} = 0 &\Rightarrow a = 2 \\ 3 - 2b = 0 &\Rightarrow b = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = \frac{7}{2}$$

(۱۳)

سوال ۱۳

گزینه درست: ۳

گزینه «۳»

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.برای رسم نمودار تابع g ، طول هر نقطه تابع f باید دو برابر شود و عرض هر نقطه قرینه شده و سپس ۲ واحد اضافه گردد.مختصات نقاط A و C به صورت زیر به دست آمده اند:

$$|x| - 2 = -\left|\frac{x}{2}\right| + 4 = -\frac{1}{2}|x| + 4 \Rightarrow |x| = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = -4 \\ x_C = 4 \end{cases}, y_A = y_C = 2$$

قطرهای چهارضلعی ABCD بر هم عمودند و مساحت آن برابر نصف حاصل ضرب اندازه قطرهایست.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

(۱۴)

سوال ۱۴

گزینه درست: ۲

گزینه «۲»

ابتدا دامنه تابع $y = f(2x + 1)$ را بدست می‌آوریم:

$$D_f = [-1, 3] \Rightarrow -1 \leq 2x + 1 \leq 3$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{y=f(2x+1)} = [-1, 1]$$

دامنه تابع g برابر است با:

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq -3x + 2 \leq 5$$

$$\Rightarrow D_g = [-1, 5]$$

(۱۵)

سوال ۱۵

گزینه درست: ۲

گزینه «۲»

مراحل تبدیل را به ترتیب اعمال می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x} - 2 \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور ها}]{x \rightarrow -x} y = \sqrt{-x} - 2$$

$$\xrightarrow[\text{طول نقاط را نصف میکنیم}]{x \rightarrow 2x} y = \sqrt{-2x} - 2$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به راست}]{a} y = \sqrt{-2(x-a)} - 2 + a$$

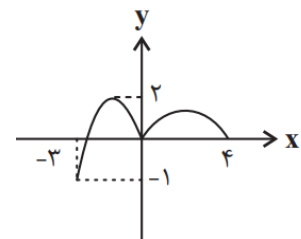
این نمودار و نمودار تابع $y = \sqrt{x} - 2$ در $x = 1$ متقاطع اند:

$$\Rightarrow \sqrt{-2+2a} - 2 + a = 1 - 2 \Rightarrow \sqrt{2a-2} = 1 - a$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(\sqrt{a-1}) + (a-1) = 0$$

معادله بالا به ازای $a-1=0$ یا همان $a=1$ برقرار است.

۱۶



گزینه درست: ۳

سوال ۱۶

گزینه «۳»

مرحله به مرحله از تابع $y = 2f(x-1)$ به تابع $y = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 6$ می‌رسیم:

۶ واحد بالا، ۷ها، قرینه، ۲ برابر، ۱ واحد به چپ، ۷ها نصف

ضابطه	$2f(x-1)$	$f(x-1)$	$f(x)$	$f\left(\frac{x}{2}\right)$	$-f\left(\frac{x}{2}\right)$	$g(x) = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 6$
دامنه	$[-3, 4]$	$[-3, 4]$	$[-4, 3]$	$[-8, 6]$	$[-8, 6]$	$[-8, 6]$
برد	$[-1, 2]$	$\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[-1, \frac{1}{2}\right]$	$[5, 6/5]$

$$\Rightarrow D_g \cap R_g = [-8, 6] \cap [5, 6/5] = [5, 6]$$

۱۷

گزینه درست: ۴

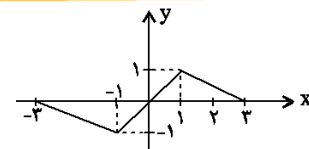
سوال ۱۷

گزینه «۴»

$$f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x)$$

داریم:

یعنی اگر نمودار را نسبت به محور x ها و محور y ها قرینه کنیم، نمودار به دست آمده منطبق بر نمودار $y = f(x)$ است. به عبارت دیگر بازتاب نمودار f نسبت به مبدأ بر خود f منطبق است. بنابراین تنها گزینه‌ای که این شرایط را دارد گزینه «۴» است.

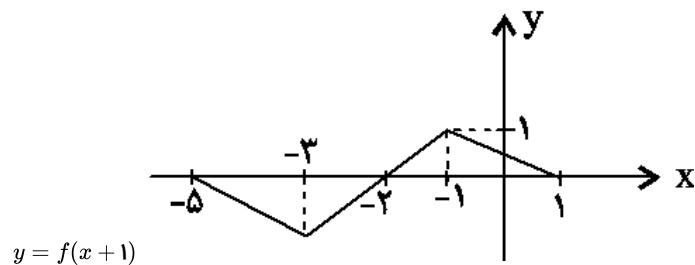


گزینه درست: ۴

سوال ۱۸

گزینه «۴»

ابتدا با انتقال تابع $y = f(x - 1)$ به اندازه دو واحد به چپ، نمودار تابع $y = f(x + 1)$ را رسم می‌کنیم، سپس دامنه تابع $y = \sqrt{(x + 1)f(x + 1)}$ را با تعیین علامت عبارت زیر رادیکال بدست می‌آوریم.



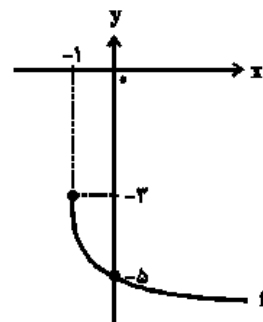
شرط دامنه رادیکال $(x + 1)f(x + 1) \geq 0$

جدول تعیین علامت عبارت بالا به صورت زیر است:

x	-۵	-۲	-۱	۱
$x + 1$	-	-	۰	+
$f(x + 1)$	-	+	+	۰
زیر رادیکال	+	-	۰	+

$$\Rightarrow D_y = [-5, -2] \cup [-1, 1]$$

۱۹



گزینه درست: ۱

سوال ۱۹

گزینه «۱»

دامنه تابع f به صورت $[-b, +\infty)$ می‌باشد که با توجه به نمودار، دامنه آن $[-1, +\infty)$ است. پس:

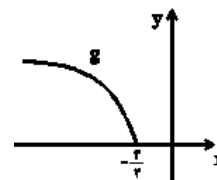
مقدار تابع در $x = -1$ برابر -3 است، داریم:

$$f(-1) = c = -3 \Rightarrow f(x) = a\sqrt{x+1} - 3$$

عرض از مبدأ نیز برابر -5 است.

$$\Rightarrow f(0) = a - 3 = -5 \Rightarrow a = -2$$

حال نمودار تابع $g(x) = \sqrt{abx+c} = \sqrt{-2x-3}$ به صورت زیر خواهد بود. دقت کنید که دامنه آن $[-\infty, -\frac{3}{2}]$ است.



همچنین می‌توان گفت نمودار g از انتقال 3 واحد نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به سمت راست و سپس $-\frac{1}{2}$ برابر کردن طول نقاط آن به دست می‌آید.

۲۰

گزینه درست: ۱

سوال ۲۰

گزینه «۱»

ابتدا عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2^3)^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{(10^{24})^{\frac{1}{2}} \times (4^8)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{(2^3 \times 3)^{\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}}}{(2^{10})^{\frac{1}{2}} \times (2^2 \times 3)^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2^{\frac{9}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{10}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4}{2^5 \times 3^{-1}} = \frac{2^4}{2^5} \times 3 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

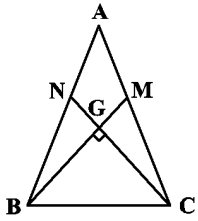
①

گزینه درست: ۴

سوال ۱

گزینه ۴

می‌دانیم میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند، پس داریم:



$$BG = \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} \times 12 = 8$$

$$CG = \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

$$S_{BGC} = \frac{1}{2} BG \times CG = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

$$S_{BGC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 3 \times 24 = 72$$

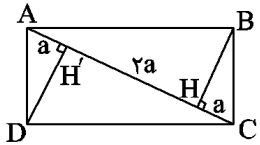
②

گزینه درست: ۴

سوال ۲

گزینه ۴

می‌دانیم در دو مثلث اگر ارتفاع‌ها با هم برابر باشند نسبت مساحت‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است. در نتیجه اگر $S_{\triangle BH'C} = S$ باشد،



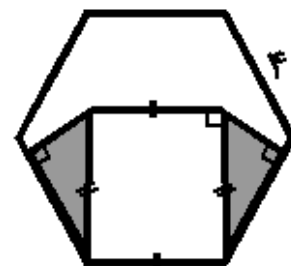
$$S_{\triangle BH'A} = 3S$$

$$S_{\triangle AH'D} = S$$

$$S_{\triangle DH'C} = 3S$$

بنابراین مطلوب سؤال: $\frac{8S}{S} = 8$ است.

۳



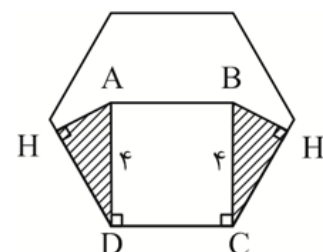
گزینه درست: ۴

سوال ۳

گزینه «۴»

هر زاویه داخلی یک شش ضلعی منتظم برابر 120° است، پس داریم:

$$\widehat{ADH} = \widehat{BCH'} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow \widehat{AAH} = \widehat{CBH'} = 60^\circ$$



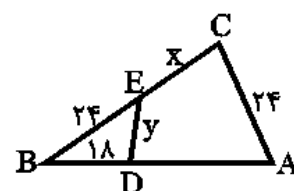
در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه اضلاع روبه‌رو به زوایای 30° و 60° به ترتیب $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است، پس داریم:

$$AH = \frac{1}{2} AD = 2, HD = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = 2\sqrt{3}$$

$$S_{ADH} = S_{BCH'} = \frac{1}{2} AH \times HD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت ناحیه هاشورخورده} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

۴



گزینه درست: ۱

سوال ۴

گزینه «۱»

دو مثلث EBD و ABC به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند و داریم:

$$\frac{ED}{AC} = \frac{EB}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{y}{24+x} = \frac{24}{48} = \frac{18}{24+x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{y}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 12 \\ \frac{18}{24+x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 24+x = 36 \Rightarrow x = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = 1$$

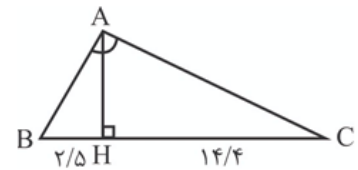
۵

گزینه درست: ۲

سوال ۵

گزینه «۲»

طبق روابط طولی در مثلث قائم الزویه ABC داریم:



$$AH^2 = BH \times CH = \frac{2}{5} \times \frac{14}{4} = \frac{36}{10} \Rightarrow AH = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

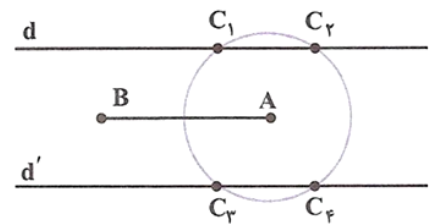
۶

گزینه درست: ۴

سوال ۶

گزینه «۴»

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۷ واحد باشند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۷ واحد است. همچنین مکان هندسی نقاطی از صفحه که از پاره خط AB به فاصله ۵ واحد باشند، دو خط به موازات پاره خط AB به فاصله ۵ واحد از آن و در طرفین پاره خط AB است. مطابق شکل، این دو مکان هندسی در ۴ نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و بنابراین ۴ نقطه متمایز برای رأس C در صفحه مختصات پیدا می‌شود.

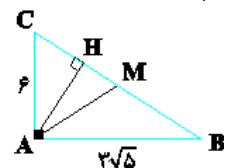


۷

گزینه درست: ۴

سوال ۷

گزینه ۴



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{طبق قضیه فیثاغورس}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{36 + 45} = \sqrt{81} = 9 \Rightarrow MC = MB = \frac{9}{2}$$

از طرفی می‌دانیم $AB \times AC = AH \times BC$ پس:

$$AH = \frac{AC \times AB}{BC} = \frac{6 \times 3\sqrt{5}}{9} = 2\sqrt{5}$$

در مثلث قائم‌الزویه ACH داریم:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow HC^2 = 36 - 20 = 16 \Rightarrow HC = 4$$

دریافتیم که طول MC برابر ۴/۵ است پس طول HM برابر است با:

$$HM = MC - HC = \frac{4}{5} - 4 = -\frac{16}{5}$$

حال نسبت مساحت‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\frac{1}{2} \times AH \times BC}{\frac{1}{2} \times AH \times HM} = \frac{BC}{HM} = \frac{9}{-\frac{16}{5}} = -\frac{45}{16}$$

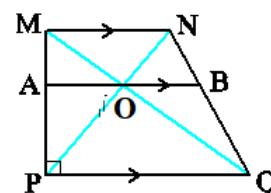
۸

گزینه درست: ۲

سوال ۸

گزینه ۲

با رسم دوزنقه قائم‌الزاویه داریم:



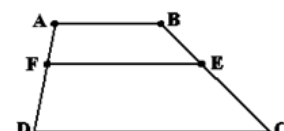
$$(*) \quad \frac{OA}{MN} = \frac{PA}{PM} \quad \text{در مثلث } MNP$$

$$(**) \quad \frac{OB}{MN} = \frac{PA}{PM} \quad \text{(تشابه ارتفاع‌ها) در مثلث } MNQ$$

با تقسیم رابطه‌های فوق داریم:

$$\frac{OA}{OB} = 1 \quad (***)$$

۹

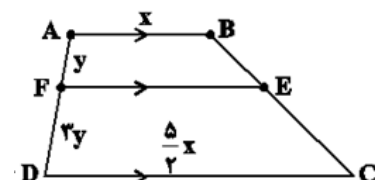


گزینه درست: ۱

سوال ۹

گزینه ۱

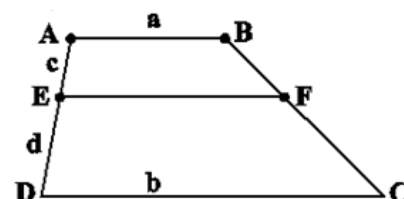
با توجه به شکل زیر و فرض‌های سؤال داریم:



$$EF = \frac{3xy + y(\frac{5}{2}x)}{2y} = \frac{11xy}{2y} = \frac{11}{2}x$$

$$\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{11}{2}x}{\frac{5}{2}x} = \frac{11}{5} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

نکته: در دوزنقه دلخواه زیر داریم:



$$EF = \frac{ad + bc}{c + d}$$

گزینه «۴»

قضیه‌ای را می‌توان به صورت دو شرطی نوشت که عکس آن نیز خود یک قضیه باشد (عکس قضیه نیز درست باشد). از طرفی عکس هر قضیه با جابه‌جایی فرض و حکم آن قضیه نوشته می‌شود.

گزینه «۱»: عکس قضیه: «اگر در دو مثلث، زوایا نظیر به نظیر برابر یکدیگر باشند، آن‌گاه آن دو مثلث هم‌نهشت هستند.» عکس قضیه درست نیست. مثلاً هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه هم‌نهشت نیستند.

گزینه «۲»: عکس قضیه: «اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه چهارضلعی لوزی است.»

عکس قضیه درست نیست. اگر در یک متوازی‌الاضلاع، اضلاع مجاور برابر هم نباشند، آن متوازی‌الاضلاع، لوزی نیست.

گزینه «۳»: عکس قضیه: «اگر دو مثلث محیط برابر داشته باشند، آن‌گاه هم‌نهشت هستند.» عکس قضیه درست نیست. مثلاً دو مثلث یکی به اضلاع ۳، ۴ و ۵ و دیگری به اضلاع ۴، ۴ و ۴، محیط برابر دارند ولی هم‌نهشت نیستند.

گزینه «۴»: عکس قضیه: «اگر ارتفاع‌های وارد بر دو ضلع مثلثی برابر باشند، آن دو ضلع نیز برابرند.» عکس قضیه درست است.

۱

گزینه درست: ۴

سوال ۱

گزینه «۴»

طبق صورت سؤال و شرط قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = bq + r, q = r + 1 \\ 0 \leq r < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = bq + q - 1 \\ 1 \leq q < b + 1 \end{cases}$$

در تقسیم جدید نیز داریم:

$$\begin{aligned} a + 91 &= b(q + 4) + 11 \Rightarrow bq + q - 1 + 91 = bq + 4b + 11 \\ \Rightarrow 79 &= 4b - q \xrightarrow{1 \leq q < b+1} 3b - 1 < 79 \leq 4b - 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} b \geq 20 \\ b < \frac{80}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

پس حداکثر مقدار b (مقسوم‌علیه) برابر ۲۶ است.

۲

گزینه درست: ۳

سوال ۲

گزینه «۳»

مطابق فرض باقی‌مانده تقسیم اعداد ۱۲۰ و ۴۵ بر عدد طبیعی m ، با هم برابر است، پس داریم:

$$\begin{cases} 120 = mq_1 + r \\ 45 = mq_2 + r \end{cases} ; 0 \leq r < m$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} 75 = m(q_1 - q_2) \Rightarrow m | 75$$

از آنجا که $75 = 3 \times 5^2$ و عدد طبیعی m بزرگ‌تر از یک است، پس پنج مقدار قابل قبول ۳، ۵، ۱۵، ۲۵ و ۷۵ برای m به دست می‌آید.

۳

گزینه درست: ۳

سوال ۳

گزینه «۳»

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} a &= 6q + 1 \xrightarrow{\times 4} 4a = 24q + 4 \\ a &= 8q' + 5 \xrightarrow{\times 3} 3a = 24q' + 15 \end{aligned} \right\} & \xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 24(q - q') - 11 \\ \Rightarrow a &= 24(q - q') - 24 + 24 - 11 = 24 \underbrace{(q - q' - 1)}_{q''} + 13 \\ \Rightarrow a &= 24q'' + 13 \end{aligned}$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۴، برابر ۱۳ است.

۴

گزینه درست: ۳

سوال ۴

گزینه «۲»

$$3x^2 - 2 = xy + 2y \Rightarrow 3x^2 - 2 = y(x + 2) \Rightarrow y = \frac{3x^2 - 2}{x + 2}$$

برای آن که به ازای اعداد صحیح مانند x ، اعدادی صحیح مانند y داشته باشیم باید صورت کسر بر مخرجش بخش پذیر باشد. به عبارت دیگر:

$$x + 2 \mid 3x^2 - 2$$

برای یافتن جواب های این مسئله می توانیم به دو روش زیر عمل کنیم:
روش اول:

$$\begin{cases} x + 2 \mid 3x^2 - 2 \\ x + 2 \mid x + 2 \Rightarrow x + 2 \mid 3x^2 + 6x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2 \mid (3x^2 + 6x) - (3x^2 - 2) \Rightarrow x + 2 \mid 6x + 2$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x + 2 \mid 6x + 2 \\ x + 2 \mid x + 2 \Rightarrow x + 2 \mid 6x + 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2 \mid (6x + 12) - (6x + 2) \Rightarrow x + 2 \mid 10$$

حالا با توجه به شمارنده های عدد ۱۰ باید ابتدا x ها را پیدا کنیم و سپس با قرار دادن این مقادیر در معادله $y = \frac{3x^2 - 2}{x + 2}$ ، مقادیر y را به دست آوریم. فقط باید دقت کنیم که نقاط مورد نظر باید در ناحیه دوم دستگاه مختصات باشند. به عبارت دیگر باید x عددی منفی و y عددی مثبت باشد:

$x+2$	-1	1	-2	2	-5	5	-10	10
x	-3	-1	-4	0	-7	3	-12	8
y	-25	1	-23	X	-29	X	-43	X

با توجه به محاسبات فوق فقط نقطه $(-1, 1)$ روی این منحنی و در ناحیه دوم دستگاه مختصات است.

روش دوم: برای یافتن جواب های صحیح معادله $y = \frac{3x^2 - 2}{x + 2}$ کافی است که ریشه مخرج را در صورت کسر قرار دهیم:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 3(-2)^2 - 2 = 10 \Rightarrow x + 2 \mid 10$$

بقیه محاسبات مشابه روش اول خواهد بود.

۵

گزینه درست: ۲

سوال ۵

گزینه «۲»

طبق ویژگی های رابطه عاد کردن، اگر $a \mid b$ ، آنگاه a هر مضربی از b را نیز عاد می کند و نیز اگر $a \mid b$ و $a \mid c$ ، آنگاه $a \mid b \pm c$. بنابراین داریم:

$$\left. \begin{aligned} a \mid 6m + 5 &\xrightarrow{\times 5} a \mid 30m + 25 \\ a \mid 5m + 4 &\xrightarrow{\times 6} a \mid 30m + 24 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۶

گزینه درست: ۲

سوال ۶

گزینه «۲»

$$a^3 \mid b^2 \Rightarrow a \times a^2 \mid b^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \mid b^2 \\ a^2 \mid b^2 \Rightarrow a \mid b \Rightarrow a^4 \mid b^4 \Rightarrow a^4 \mid b^4 \times b \Rightarrow a^4 \mid b^5 \end{cases}$$

پس رابطه های گزینه های «۱»، «۳» و «۴» همواره درست هستند ولی رابطه گزینه «۲» در حالت کلی نتیجه نمی شود. به عنوان مثال نقض برای گزینه «۲»، $a = 4$ و $b = 8$ را در نظر بگیرید.

۷

گزینه درست: ۴

سوال ۷

گزینه «۴»

اگر حاصل کسر $\frac{x^2 + x - 3}{x + 1}$ عددی صحیح شود، آنگاه $x + 1 | x^2 + x - 3$

و در نتیجه داریم: $\left. \begin{matrix} x + 1 | x^2 + x - 3 \\ x + 1 | x(x + 1) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x + 1 | -3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 1 & \Rightarrow x = 0 \\ x + 1 = -1 & \Rightarrow x = -2 \\ x + 1 = 3 & \Rightarrow x = 2 \\ x + 1 = -3 & \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

از بین مقادیر به دست آمده، فقط $x = 2$ مقداری طبیعی است.

۸

گزینه درست: ۲

سوال ۸

گزینه «۲»

فرض کنید عدد طبیعی n ، عددی مربع کامل باشد. در این صورت n را می‌توان به صورت k^2 ($k \in \mathbb{N}$) نوشت. از طرفی n مضرب ۵ است، پس k نیز باید مضرب ۵ باشد، یعنی $k = 5t$ ($t \in \mathbb{N}$) و t فرد است (چون n عددی فرد است). در این صورت داریم:

$$10^4 \leq n < 10^6 \Rightarrow 10^4 \leq (5t)^2 < 10^6 \xrightarrow{\text{جذر}} 100 \leq 5t < 1000$$

$$\xrightarrow{\div 5} 20 \leq t < 200 \Rightarrow t = 21, 23, \dots, 199$$

تعداد این اعداد فرد برابر است با:

$$\frac{199 - 21}{2} + 1 = 90$$

۹

گزینه درست: ۳

سوال ۹

گزینه «۳»

$$9 | 8^n - 4^n = 4^n(2^n - 1)$$

می‌دانیم 4^n بر ۹ بخشپذیر نیست در نتیجه برای اینکه رابطه بالا برقرار باشد باید:

$$9 | 2^n - 1 \Rightarrow 2^3 + 1^3 | 2^n - 1^n$$

می‌دانیم زمانی $a^k + b^k | a^n - b^n$ برقرار است که $\frac{n}{k}$ زوج باشد، در نتیجه:

$$\frac{n}{3} = 2k \Rightarrow n = 6k \xrightarrow{k=166} n = 6 \times 166 = 996$$

۲۴ = ۹ + ۹ + ۶ : مطلوب سؤال

۱۰

گزینه درست: ۲

سوال ۱۰

گزینه «۲»

$$\left. \begin{matrix} \frac{1400}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a | 1400 \\ \frac{a}{20} \in \mathbb{N} \Rightarrow 20 | a \end{matrix} \right\} \Rightarrow 20k | 1400 \Rightarrow k | 70$$

$\{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$ = مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۷۰

بنابراین ۸ عدد طبیعی برای a وجود دارد.

①

گزینه درست: ۴

سوال ۱

گزینه «۴»

کار انجام شده روی گاز در فرایند هم فشار از رابطه $W = -P\Delta V$ به دست می‌آید، داریم:

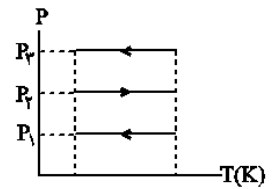
$$W = -P\Delta V = -P(V_f - V_i)$$

$$P = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}, V_i = 1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$V_f = V_i - \frac{V_i}{100} = \frac{9}{10} V_i = \frac{9}{10} \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$W = -10^5 \left(\frac{9}{10} \times 10^{-3} - 10^{-3} \right) = 20 \text{ J}$$

②



گزینه درست: ۴

سوال ۲

گزینه «۴»

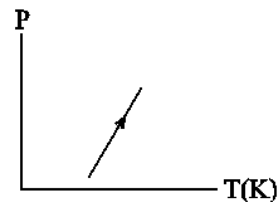
با توجه به نمودار، درمی‌یابیم که هر سه فرایند در فشار ثابت انجام شده‌اند که در نمودار $V-T$ ، فرایند هم فشار خطی است که امتداد آن از مبدأ محور مختصات عبور می‌کند (رد گزینه‌های (۱) و (۳)). از طرفی با توجه به معادله حالت

$PV = nRT$ درمی‌یابیم که $V = \frac{nR}{P}T$ است که هرچه شیب نمودار $V-T$ کمتر باشد، در حقیقت فشار آن بیشتر است؛

زیرا شیب خط با فشار رابطه عکس دارد. پس با توجه به نمودار چون $P_3 > P_2 > P_1$ است، لذا با مقایسه شیب نمودار،

آن‌ها در نمودار $V-T$ ، $\frac{nR}{P_3} < \frac{nR}{P_2} < \frac{nR}{P_1}$ شده و درمی‌یابیم که نمودار گزینه «۴» صحیح است.

(۳)

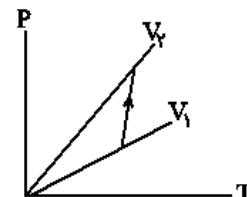


گزینه درست: ۱

سوال ۳

گزینه «۱»

دقت کنید که امتداد فرایند از مبدأ مختصات نمی‌گذرد؛ پس این فرایند، هم‌حجم نیست (رد گزینه ۳) و با رسم خطوطی از مبدأ مختصات به ابتدا و انتهای فرایند، حجم نقاط ابتدا و انتهای فرایند را مقایسه می‌کنیم.



با توجه به نمودار $P - T$ که شیب نمودار با حجم رابطه عکس دارد، درمی‌یابیم که $V_2 < V_1$ است، لذا گاز در این فرایند کاهش حجم داشته است و کار انجام شده روی آن مثبت است، پس درمی‌یابیم که گزینه ۱ صحیح است. دلیل نادرستی گزینه ۲ این است که در این فرایند دمای گاز افزایش یافته است، پس انرژی درونی آن نیز افزایش می‌یابد. با توجه به قانون اول ترمودینامیک، چون $\Delta U > 0$ است، لذا مجموع کار و گرمای مبادله شده صفر نیست که کار و گرما قرینه یکدیگر باشند (دلیل نادرستی گزینه ۴)

(۴)

گزینه درست: ۴

سوال ۴

گزینه «۴»

عبارت گزینه (۴) نادرست است، در فرایند انبساط بی‌دررو، تغییرات انرژی درونی، منفی است.

$$\Delta U = W \xrightarrow{\Delta U = W} \Delta U < 0 \Rightarrow W < 0 \Rightarrow \Delta V > 0 : \text{انبساط بی‌دررو}$$

(۵)

گزینه درست: ۴

سوال ۵

گزینه «۴»

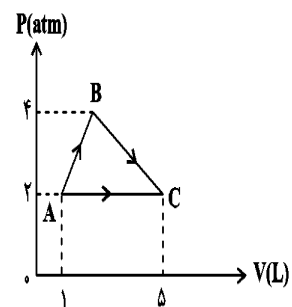
در فرایند هم‌دمای مقدار معینی گاز کامل، انرژی درونی تغییری نمی‌کند. در انبساط بی‌دررو داریم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{Q=0} \Delta U = W$$

$$\xrightarrow{\Delta V > 0 \Rightarrow W < 0} \Delta U < 0$$

در انبساط هم‌فشار مقدار معینی گاز کامل، چون دمای گاز افزایش می‌یابد، بنابراین انرژی درونی گاز افزایش خواهد یافت.

۶

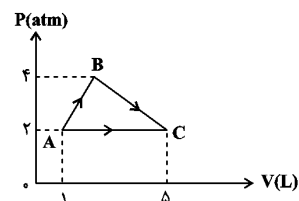


گزینه درست: ۲

سوال ۶

گزینه «۲»

مساحت زیر نمودار $A \rightarrow C$ را S_1 و مساحت داخل مثلث را S_2 در نظر می‌گیریم.



$$W_{A \rightarrow C} = -S_1 = -2 \times (5 - 1) \times 10^2 = -800 J$$

$$W_{\text{چرخه}} = -S_2 = -\frac{F \times 2}{2} \times 100 = -400 J$$

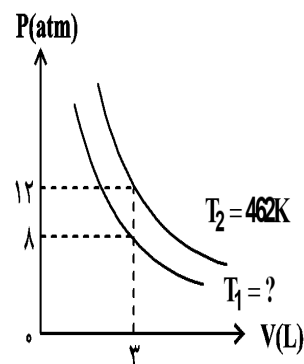
کار انجام شده در فرایند ABC برابر با مجموع S_1 و S_2 است.

$$W_{ABC} = -(S_1 + S_2) = -1200 J$$

بنابراین:

$$\frac{W_{ABC}}{W_{AC}} = \frac{-1200}{-800} = \frac{3}{2}$$

۷



گزینه درست: ۳

سوال ۷

گزینه «۳»

با توجه به نمودار در حجم ثابت، فشار $\frac{2}{3}$ برابر شده است، بنابراین دمای مطلق نیز $\frac{2}{3}$ برابر می‌شود.

$$T_1 = \frac{2}{3} T_2 = \frac{2}{3} \times 462 = 308 K$$

۸

گزینه درست: ۲

سوال ۸

گزینه «۲»

در یک یخچال با انجام کار W ، گرمای Q_L از مواد داخل یخچال (منبع دمایی پایین) گرفته شده و گرمای Q_H به محیط بیرون (منبع دمای بالا) داده می‌شود، بنابراین در این یخچال داریم:

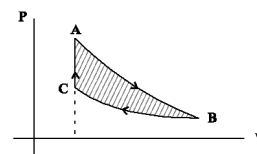
$$|Q_H| = \frac{6}{5} Q_L$$

با استفاده از قانون اول ترمودینامیک در مورد یخچال‌ها، داریم:

$$|Q_H| = W + Q_L$$

$$\begin{aligned} |Q_H| = \frac{6}{5} Q_L \\ \frac{6}{5} Q_L = W + Q_L \Rightarrow \frac{Q_L}{W} = 5 \end{aligned}$$

۹



گزینه درست: ۲

سوال ۹

گزینه «۲»

با توجه به چرخه داریم: (AB بی‌دررو و BC هم‌دم هستند).

$$\Delta U_{\text{چرخه}} = 0 \Rightarrow \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0$$

$$\Rightarrow -W_{AB} + 0 + Q_{CA} = 0 \Rightarrow Q_{CA} = W_{AB}$$

۱۰

گزینه درست: ۲

سوال ۱۰

گزینه «۲»

با توجه به رابطه بازده یک ماشین گرمایی داریم:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H}$$

$$\Rightarrow 0.25 = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} \Rightarrow \frac{|Q_L|}{Q_H} = 0.75$$

در حالت دوم، با کاهش گرمای اتلافی، داریم:

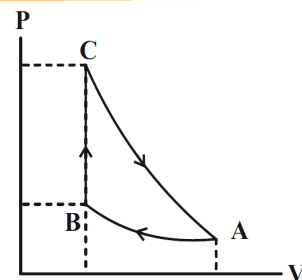
$$|Q'_L| = |Q_L| - 0.2|Q_L| \Rightarrow |Q'_L| = 0.8|Q_L|$$

$$\eta' = 1 - \frac{|Q'_L|}{Q_H} \Rightarrow \eta' = 1 - \frac{0.8|Q_L|}{Q_H}$$

$$\eta' = 1 - 0.8 \times 0.75 = 1 - 0.6 \Rightarrow \eta' = 0.4$$

$$\Rightarrow \Delta\eta = 0.4 - 0.25 = 0.15$$

۱۱



گزینه درست: ۱

سوال ۱۱

گزینه «۱»

می‌دانیم در یک چرخه و در فرایند هم‌دما $\Delta U = 0$ است. با توجه به این که $\Delta U = Q + W$ است، به صورت زیر گرمای مبادله شده در فرایند هم‌حجم را می‌یابیم. دقت کنید، فرایند AB هم‌دما، فرایند BC هم‌حجم و فرایند CA بی‌دررو است. در ضمن در فرایند هم‌حجم $W = 0$ و در فرایند بی‌دررو $Q = 0$ است. در این چرخه چون $V_A > V_C$ است $W_{CA} < 0$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{چرخه}} &= \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} \xrightarrow{\Delta U_{\text{چرخه}}=0} \\ &= 0 + W_{BC} + Q_{BC} + W_{CA} + Q_{CA} \xrightarrow{\Delta U_{AB}=0, W_{BC}=0, Q_{CA}=0} \\ &= 0 + Q_{BC} - 160 + 0 \Rightarrow Q_{BC} = 160 \text{ J} \end{aligned}$$

۱۲

گزینه درست: ۲

سوال ۱۲

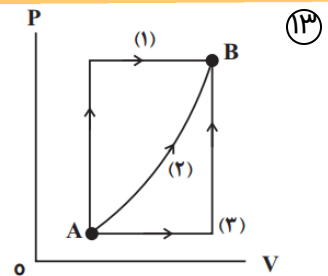
گزینه «۲»

می‌دانیم توان خروجی ماشین از رابطه $P = \frac{|W|}{t}$ به دست می‌آید. بنابراین ابتدا با استفاده از رابطه بازده ماشین گرمایی $(\eta = \frac{|W|}{Q_H})$ و با توجه به این که $Q_H = |Q_L| + |W|$ است، به صورت زیر $|W|$ را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{|W|}{Q_H} \xrightarrow{Q_H=|Q_L|+|W|} \eta = \frac{|W|}{|Q_L| + |W|} \\ \eta &= \frac{40}{100} = \frac{4}{10} \xrightarrow{|Q_L|=60 \text{ J}} \frac{4}{10} = \frac{|W|}{60 + |W|} \\ \Rightarrow 10|W| &= 240 + 4|W| \Rightarrow 6|W| = 240 \Rightarrow |W| = 40 \text{ J} \end{aligned}$$

اکنون توان خروجی ماشین گرمایی را پیدا می‌کنیم:

$$P = \frac{|W|}{t} \xrightarrow{t=0.5 \text{ s}} P = \frac{40}{0.5} = 80 \text{ W}$$



گزینه درست: ۳

سوال ۱۳

گزینه «۳»

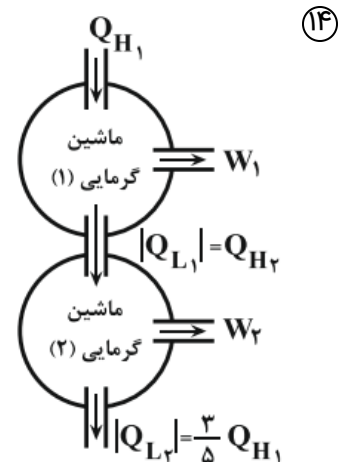
چون هر سه فرایند از نقطه A شروع و به نقطه B ختم شده‌اند، تغییرات انرژی درونی گاز در هر سه مسیر با هم برابر است. از طرف دیگر، چون حجم گاز افزایش یافته است، در هر سه فرایند علامت کار انجام شده روی دستگاه منفی است. بنابراین داریم:

$$\Delta U = W_1 + Q_1 = W_2 + Q_2 = W_3 + Q_3 = \text{ثابت}$$

با توجه به این که مساحت زیر نمودار در فرایند (۱) بزرگ‌تر از فرایند (۲) و در فرایند (۲) بزرگ‌تر از فرایند (۳) است داریم:

$$|W_1| > |W_2| > |W_3|$$

چون $W < 0$ است، بنابراین: $Q_1 > Q_2 > Q_3$



گزینه درست: ۴

سوال ۱۴

گزینه «۴»

با استفاده از رابطه بازده ماشین گرمایی آرمانی و با توجه به این که $Q_{H2} = |Q_{L1}|$ و $|Q_{L2}| = \frac{3}{5} Q_{H1}$ است، می‌توان نوشت:

$$\eta_2 = 1 - \frac{|Q_{L2}|}{Q_{H2}} \xrightarrow{\eta_2 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}} \frac{1}{4} = 1 - \frac{\frac{3}{5} Q_{H1}}{Q_{H2}}$$

$$\xrightarrow{Q_{H2} = |Q_{L1}|} \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \frac{Q_{H1}}{|Q_{L1}|} \Rightarrow \frac{|Q_{L1}|}{Q_{H1}} = \frac{4}{5}$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_{L1}|}{Q_{H1}} \Rightarrow \eta_1 = 1 - \frac{4}{5} \Rightarrow \eta_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow \eta_1 = 20\%$$

(۱۵)

گزینه درست: ۲

سوال ۱۵

گزینه «۲»

با استفاده از حالت مقایسه‌ای معادله حالت گازهای کامل، داریم:

$$\begin{aligned}
 PV &= nRT \\
 \Rightarrow PV &= \frac{m}{M} RT \Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \\
 \Rightarrow \rho &= \frac{PM}{RT} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \frac{T_1}{T_2} \\
 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{4}{2} \times \frac{273 + 27}{273 + 47} \\
 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{15}{8}
 \end{aligned}$$

(۱۶)

گزینه درست: ۴

سوال ۱۶

در فرایند هم‌حجم، کار انجام شده روی گاز صفر است. بنابراین با از دست دادن گرما، انرژی درونی گاز و در نتیجه دمای آن کاهش می‌یابد. بنابراین نمودار گزینه «۴» صحیح است.

دقت کنید که طبق معادله حالت گازهای کامل $(P = \frac{nRT}{V})$ ، نمودار $P - T$ یک فرایند هم‌حجم خط راستی با شیب $\frac{nR}{V}$ است که امتداد آن از مبدأ مختصات می‌گذرد.

(۱۷)

گزینه درست: ۱

سوال ۱۷

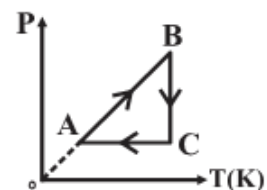
چون دستگاه به محیط گرما داده، $Q = -700J$ است. از طرفی می‌دانیم در فرایندی که گاز تراکم می‌یابد، کار انجام شده روی گاز مثبت است. بنابراین:

$$W = +1200J$$

لذا طبق قانون اول ترمودینامیک خواهیم داشت:

$$\Delta U = Q + W = -700 + 1200 = +500J$$

(۱۸)



گزینه درست: ۴

سوال ۱۸

چون نمودار $P - T$ فرایند AB خط راستی است که امتداد آن از مبدأ می‌گذرد، بنابراین AB فرایندی هم‌حجم است که طی آن فشار افزایش می‌یابد و همچنین فرایند BC به‌صورت هم‌دما است. پس فقط نمودار گزینه «۴» درست نشان داده شده است.

(۱۹)

گزینه درست: ۳

سوال ۱۹

اگر در چرخه یک ماشین گرمایی، تمام گرمای گرفته شده از منبع دمابالا به کار تبدیل شود، قانون اول ترمودینامیک نقض نمی‌شود؛ اما براساس قانون دوم ترمودینامیک امکان طراحی و ساخت ماشینی که این تبدیل را انجام دهد، غیرممکن است.

در مورد گزینه «۴» توجه کنید ممکن است در یک فرایند (انبساط هم‌دما) گاز تمام گرمای دریافتی را به کار تبدیل کند. این موضوع تناقضی با قوانین ترمودینامیک ندارد.

در فرایند انبساط هم‌فشار، چون حجم گاز افزایش می‌یابد، طبق رابطه $W = -P\Delta V$ کار محیط روی گاز منفی است (یعنی گاز روی محیط کار انجام می‌دهد). از طرفی طبق قانون گازهای کامل ($PV = nRT$) هنگامی که حجم گاز افزایش می‌یابد، در فشار ثابت، دما هم افزایش می‌یابد ($\Delta T > 0$). بنابراین انرژی درونی گاز افزایش می‌یابد. طبق قانون اول ترمودینامیک داریم:

$$\underbrace{\Delta U}_{\text{مثبت}} = \underbrace{W}_{\text{منفی}} + Q \xrightarrow{\Delta U > 0} Q > |W|$$

پس Q باید مثبت باشد و مقدار آن همواره بزرگتر از $|W|$ است.

۱

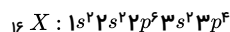
گزینه درست: ۱

سوال ۱

گزینه «۱»

موارد (ب) و (ت) درست هستند.

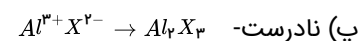
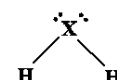
عنصری که بیرونی‌ترین زیرلایه آن $3p^5$ است، در دوره سوم جدول تناوبی قرار دارد. پس عنصر X نیز در دوره سوم و گروه ۱۶ قرار دارد. در نتیجه این عنصر دارای عدد اتمی ۱۶ بوده که همان گوگرد است.



بررسی موارد:

الف) نادرست- در بیرونی‌ترین لایه اتم آن ۶ الکترون وجود دارد.

ب) درست



ت) درست - تعداد الکترون‌ها با $l = 0$ برابر ۶ و تعداد الکترون‌ها با $l = 1$ برابر ۱۰ الکترون می‌باشد، در نتیجه نسبت آن‌ها برابر $\frac{6}{10}$ است.

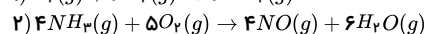
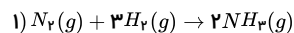
۲

گزینه درست: ۲

سوال ۲

گزینه «۲»

ابتدا ۲ معادله فرایند هابر و سوختن گاز آمونیاک را نوشته و موازنه می‌کنیم:



ابتدا از مقدار N_2 مقدار NH_3 و سپس با استفاده از معادله (۲) مقدار گاز NO را برحسب لیتر محاسبه می‌کنیم باید توجه داشت که اگر فرآورده‌ها را به شرایط STP برسانیم (دما $0^\circ C$ و فشار 1 atm) آب به صورت مایع از گازها جدا می‌شود.

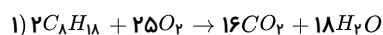
$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \text{mol } N_2 \times \frac{1 \text{mol } N_2}{28 \text{g } N_2} \times \frac{2 \text{mol } NH_3}{1 \text{mol } N_2} \times \frac{22.4 \text{L } NO}{1 \text{mol } NO} \\ & \times \frac{22.4 \text{L } NO}{1 \text{mol } NO} = 13.44 \text{L } NO \end{aligned}$$

۳

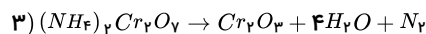
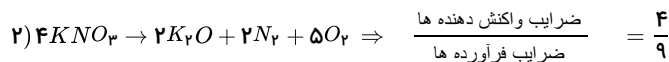
گزینه درست: ۴

سوال ۳

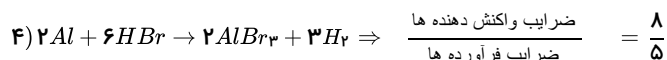
گزینه «۴»

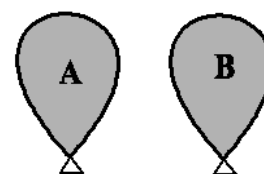


$$\Rightarrow \frac{\text{ضرایب واکنش دهنده ها}}{\text{ضرایب فرآورده ها}} = \frac{27}{34}$$



$$\Rightarrow \frac{\text{ضرایب واکنش دهنده ها}}{\text{ضرایب فرآورده ها}} = \frac{1}{6}$$





۴

گزینه درست: ۴

سوال ۴

گزینه «۴»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: چگالی گازها به جرم مولی آن‌ها وابسته است. اگر دو گاز متفاوت باشند در صورت ثابت بودن سایر عوامل چگالی آن‌ها نیز متفاوت خواهد بود.

گزینه «۲»: جرم مولی گاز اکسیژن بیشتر از متان است و با جرم مساوی مقدار مول گاز O_2

کمتر خواهد شد. بنابراین برای برابری حجم باید دمای بادکنک A بیشتر باشد.

گزینه «۳»: در دمای یکسان تعداد مول گازهای پرکننده هر دو بادکنک با هم برابر خواهد بود اما تعداد اتم‌ها بستگی به شمار اتم‌های مولکول هر گاز دارد.

گزینه «۴»: حجم بادکنک به دما و تعداد مول گاز بستگی دارد (در فشار ثابت) حال چون دمای بیشتر باعث افزایش حجم می‌شود برای ثابت ماندن حجم باید تعداد مول گاز کاهش یابد، بنابراین مول گاز بادکنک A کمتر است.

۵

گزینه درست: ۴

سوال ۵

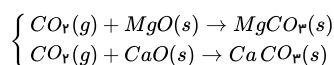
گزینه «۴»

بررسی موارد نادرست:

گزینه «۱»: سوخت سبز دارای اتم‌های کربن و هیدروژن و اکسیژن است. (نه نیتروژن)

گزینه «۲»: پلاستیک سبز پلیمری (نه مونومر) بر پایه نشاسته است.

گزینه «۳»: CO_2 را در واکنش با اکسید فلزات قلیایی خاکی (گروه ۲) به صورت CO_3^{2-} تثبیت می‌کنند.



۶

گزینه درست: ۲

سوال ۶

گزینه «۲»

موارد ب و ت درست هستند.

Y، X و Z به ترتیب گازهای NO و NO_2 و O_2 می‌باشند.

بررسی موارد نادرست:

الف) Y یعنی NO_2 عامل قهوه‌ای رنگ بودن هوای کلان شهرها است.

پ) Z یعنی O_2 با ۲۱ دومین رتبه را در میزان درصد حجمی گازهای سازنده هوای پاک و خشک تروپوسفر دارد.

۷

گزینه درست: ۱

سوال ۷

گزینه «۴»

گزینه «۱»: اوزون به طور ناهمگون در لایه‌های مختلف توزیع شده است.

گزینه «۲»: نخستین گاز خارج شده در این فرایند گاز نیتروژن است که برای پر کردن تایر خودروها استفاده می‌شود.

گزینه «۳»: با عبور هوای مایع از یک ستون تقطیر، اجزای سازنده جداسازی و در ظرف‌های جدا ذخیره می‌شوند.

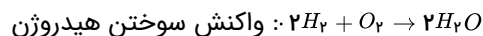
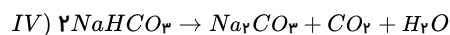
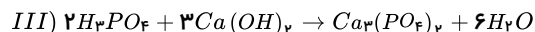
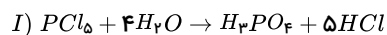
گزینه «۴»: نخستین ماده‌ای که در فرایند تهیه هوای مایع، از هوا حذف می‌شود، آب است که دارای ۴ الکترون پیوندی است.

۸

گزینه درست: ۱

سوال ۸

گزینه «۳»



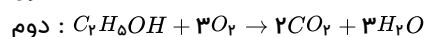
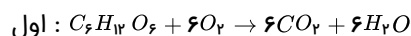
۹

گزینه درست: ۱

سوال ۹

گزینه «۳»

ابتدا واکنش‌ها را موازنه می‌کنیم.



$$\text{اول: } L_{CO_2} = m g C_7H_{12}O_8 \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_{12}O_8}{180 g C_7H_{12}O_8} \times \frac{6 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_7H_{12}O_8}$$

$$\times \frac{22/4 L CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} \simeq 0/75 m L CO_2$$

$$\text{دوم: } L_{CO_2} = m g C_7H_8OH \times \frac{1 \text{ mol } C_7H_8OH}{108 g C_7H_8OH} \times \frac{2 \text{ mol } CO_2}{1 \text{ mol } C_7H_8OH}$$

$$\times \frac{22/4 L CO_2}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{1 L CO_2}{1/19 CO_2} \simeq 1/74 m L CO_2$$

$$\frac{\text{اول}}{\text{دوم}} \frac{L CO_2}{L CO_2} = \frac{0/75 m}{1/74 m} \simeq 0/43$$

۱۰

گزینه درست: ۱

سوال ۱۰

گزینه «۲»

الف) درست

ب) نادرست: فراوان‌ترین ترکیب گازی CO_2 است ولی در صنعت سرماسازی از گاز نیتروژن استفاده می‌شود.

پ) نادرست: در ژرفای زمین، هلیوم توسط واکنش‌های هسته‌ای تولید می‌شود نه شیمیایی.

ت) درست: در بین اجزای هوای مایع، نیتروژن کم‌ترین دمای جوش را دارد و در هنگام گرم کردن هوای مایع اولین گازی است که از آن خارج می‌شود.

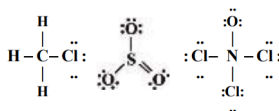
۱۱

گزینه درست: ۱

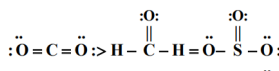
سوال ۱۱

گزینه «۲»

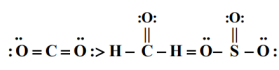
مورد اول: درست:



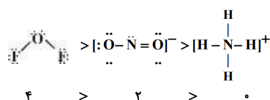
مورد دوم: درست:



مورد سوم: نادرست:



مورد چهارم: درست:



۱۲

گزینه درست: ۳

سوال ۱۲

گزینه «۳»

N_2 و H_2 حتی در حضور جرقه هم واکنش نشان نمی‌دهد، برای انجام این واکنش دمای $450^\circ C$ و فشار 200 atm و کاتالیزگر آهن نیاز است.

گزینه «۱»: H_2 و O_2 در حضور جرقه و یا کاتالیزگر پلاتین، آب تولید می‌کنند.

گزینه «۲»: N_2 و O_2 در موتور خودروها و یا رعد و برق که دما خیلی بالاست واکنش می‌دهد.

گزینه «۴»: NO_2 و O_2 در حضور نور خورشید واکنش داده NO و O_3 تروپوسفری تولید می‌کنند.

۱۳

گزینه درست: ۳

سوال ۱۳

گزینه «۳»

با افزایش مقدار گاز کربن دی اکسید در هوا به دنبال فعالیت‌های صنعتی:

- میانگین جهانی دمای سطح زمین افزایش می‌یابد.

- مساحت برف در نیمکره شمالی زمین کاهش می‌یابد

- میانگین سطح آب‌های آزاد زمین افزایش پیدا می‌کند.

۱۴

گزینه درست: ۲

سوال ۱۴

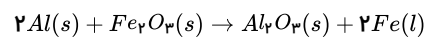
گزینه «۲»

$$? LCO_f = 630g C_5H_{12} O_8 \times \frac{1mol C_5H_{12} O_8}{180g C_5H_{12} O_8} \\ \times \frac{6mol CO_f}{1mol C_5H_{12} O_8} \times \frac{22/4 LCO_f}{1mol CO_f} = 470/4 LCO_f$$

(۱۵)

گزینه درست: ۲

سوال ۱۵



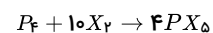
$$?g Al = 22/7 g Fe \times \frac{1 mol Fe}{56 g Fe} \times \frac{2 mol Al}{2 mol Fe} \times \frac{27 g Al}{1 mol Al} = 10/8 g Al$$

(۱۶)

گزینه درست: ۳

سوال ۱۶

گزینه «۳»



$$? mol PX_5 = 9600 mL X_2 \times \frac{1 mol X_2}{24000 mL X_2} \times \frac{5 mol PX_5}{10 mol X_2} = 0/16 mol PX_5$$

$$PX_5 \text{ مولی جرم} = \frac{68/96 g}{0/16 mol} = 431 g \cdot mol^{-1}$$

$$31 + 5X = 431 \Rightarrow X = \frac{431 - 31}{5} = 80 g \cdot mol^{-1}$$

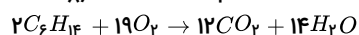
(۱۷)

گزینه درست: ۴

سوال ۱۷

گزینه «۴»

$$\frac{0/645 \times 40}{86} = \frac{mol C_7H_{14}}{1} \Rightarrow C_7H_{14} = 0/3 mol$$



$$\frac{mol O_2}{19} = \frac{0/3}{2} \Rightarrow O_2 = 2/85 mol$$

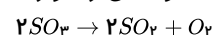
(۱۸)

گزینه درست: ۱

سوال ۱۸

گزینه «۱»

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:



$$?mLO_2 = 1 g SO_3 \times \frac{1 mol SO_3}{80 g SO_3} \times \frac{1 mol O_2}{2 mol SO_3} \times \frac{22/4 LO_2}{1 mol O_2} \times \frac{1000 mL O_2}{1 LO_2} = 140 mL O_2$$

(۱۹)

گزینه درست: ۴

سوال ۱۹

گزینه «۴»

بررسی گزینه‌های نادرست:

(۱) شکل و حجم یک ماده جامد به شکل ظرف بستگی ندارند.

(۲) تراکم‌پذیری گازها بیشتر از مایعات است.

(۳) گازها در اثر افزایش فشار متراکم می‌شوند، یعنی مولکول‌های آن‌ها به هم نزدیک می‌شوند و با کاهش فشار فاصله بین مولکولی افزایش می‌یابد و مولکول‌ها از هم دور می‌شوند.

گزینه «۴»

تعداد مول‌های H_2 حاصل از واکنش اول را حساب می‌کنیم و با CuO واکنش می‌دهیم تا جرم Cu تولید شده به دست آید:

$$? \text{ mol } H_2 = 5/4 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mol } H_2}{2 \text{ mol Al}} = 0/3 \text{ mol } H_2$$

$$? \text{ g Cu} = 0/3 \text{ mol } H_2 \times \frac{1 \text{ mol Cu}}{1 \text{ mol } H_2} \times \frac{64 \text{ g Cu}}{1 \text{ mol Cu}} = 19/2 \text{ g Cu}$$